

فصلنامه پژوهش‌ها و سیاست‌های اقتصادی
سال بیست و چهارم، شماره ۷۹، پاییز ۱۳۹۵، صفحات ۲۸-۷

توزیع بهینه منابع بودجه استانی بر پایه یک مدل کنترل بهینه

هادی رحمانی فضلی

دانشجوی دکتری اقتصاد، دانشگاه شهید بهشتی (نویسنده مسئول)

Hady.rahmani@gmail.com

عباس عرب مازار

دانشیار گروه اقتصاد، دانشکده اقتصاد دانشگاه شهید بهشتی

Ab_arabmazar@sbu.ac.ir

چکیده

هدف این مطالعه، ارائه مدلی جهت تخصیص بهینه استانی منابع بودجه‌ای با توجه به اولویت‌های استان‌ها و در راستای رفع تمرکز مالی و عدم تعادل فضایی کشور و کاهش نابرابری‌های منطقه‌ای است، به نحوی که حداکثر رفاه اجتماعی را تضمین نماید. برای این منظور یک مدل پویا مبتنی بر نظریه کنترل بهینه طراحی شده و نقطه تعادل بلندمدت این مدل که بیانگر سطوح بهینه تخصیص منابع مالی به استان‌های کشور است، با تمرکز بر ۱۲ شاخص کلان شامل نسبت جمعیت، نرخ مرگ و میر نرخ بیکاری و ضریب جینی، شاخص وزنی امکانات آموزشی، نرخ باسوادی و نرخ مشارکت اقتصادی، نسبت تولید داخلی استان به کشور و نسبت ارزش افزوده بخش‌های کشاورزی، صنعت و خدمات به کل کشور و شاخص وزنی امکانات بهداشتی محاسبه گردیده است. همچنین، پویایی جواب بهینه کوتاه‌مدت مدل نیز مورد تحلیل قرار گرفته شده است. بر پایه نتایج، اگر سیاست‌گذار و برنامه‌ریز بودجه به این ۱۲ شاخص اهمیت یکسان بدهد، با توجه به نقطه تعادل بلندمدت مدل، سهم بیشتری از بودجه به استان‌های کمتر توسعه‌یافته اختصاص پیدا می‌کند که مطابق با شیوه جاری بودجه‌ریزی استانی نیست. نتایج همچنین نشان می‌دهد که تغییر اولویت در برنامه‌ریزی بودجه‌ای سبب تغییر نقطه تعادل بلندمدت مدل و تغییر ترکیب سهم بهینه بودجه تخصیص یافته به استان‌های کشور می‌شود.

طبقه‌بندی JEL: D71, C61

واژه‌های کلیدی: توزیع بهینه منابع مالی، رشد متوازن منطقه‌ای، نظریه کنترل بهینه، تعادل بلندمدت، تحلیل سلسله مراتبی.

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر و به دنبال رشد سریع جمعیت کشور، توجه به توسعه متوازن و پایدار منطقه‌ای، رفع تمرکز و عدم تعادل فضایی کشور و کاهش نابرابری‌ها به یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های سیاست‌گذاران، دولت‌مردان و برنامه‌ریزان بودجه عمومی کشور تبدیل شده است. دستیابی به رشد و توسعه متوازن و متعادل و پایدار منطقه‌ای منوط به توزیع بهینه و عادلانه منابع مالی و بودجه‌ای است. توزیع بهینه منابع مالی ضمن کاهش نابرابری‌ها در دستیابی به امکانات عمومی و رفع محرومیت‌های منطقه‌ای، زمینه رفع مشکل تمرکز و عدم تعادل فضایی در کشور را فراهم نموده و امکان دستیابی به توسعه و رشد متعادل و پایدار منطقه‌ای را در کشور محقق می‌سازد (جدیدی میاندشتی، ۱۳۸۳).

در گذشته، انتخاب استراتژی‌های نادرست برای توسعه و توجه به رشد قطبی باعث شده است که کلان‌شهرها کانون تصمیم‌گیری‌های مالی و سرمایه‌گذاری باشند و تمامی امکانات مادی و فکری رشد و توسعه در این دسته از شهرها جمع گردد. نتیجه این امر تمرکز سرمایه در شهرهای بزرگ، کمبود زیرساخت‌ها در نواحی کمتر توسعه‌یافته و کاهش بهره‌وری در این مناطق و، سرانجام، مهاجرت نیروی انسانی از این مناطق است (حسین‌آبادی، ۱۳۹۲). بر پایه مطالعات، اولین اقدام برنامه‌ریزی منطقه‌ای جهت ایجاد تعادل و شکل‌دهی به فضاها مناسب و همگون، شناخت نابرابری‌های اقتصادی، اجتماعی و فرهنگی نواحی مختلف و داشتن دانش کافی در زمینه جایگاه مناطق به لحاظ برخورداری از شاخص‌های توسعه است (مؤمنی و حاتمی، ۱۳۸۹؛ حسین‌آبادی، ۱۳۹۲). از این‌رو، اخیراً مسئله رتبه‌بندی درجه توسعه یافتگی مناطق مختلف کشور در مطالعات تجربی زیادی مورد توجه قرار گرفته است (جدیدی میاندشتی، ۱۳۸۳؛ مؤمنی و حاتمی، ۱۳۸۹؛ اسلامی، ۱۳۹۱؛ زینل‌زاده و همکاران، ۱۳۹۱). این مطالعات از روش‌هایی نظیر تاکسونومی عددی^۱، تحلیل خوشه‌ای^۲، تحلیل عاملی^۳ و تاپسیس^۴ استفاده کرده‌اند (رضوانی، ۱۳۸۱؛ جدیدی میاندشتی، ۱۳۸۳؛ حاتمی‌نژاد و همکاران، ۱۳۹۰؛ حسین‌آبادی، ۱۳۹۲).

اقدام مهم بعدی در برنامه‌ریزی منطقه‌ای با هدف توزیع بهینه منابع مالی و با محوریت کاهش نابرابری‌ها و رفع عدم توازن و تعادل منطقه‌ای، تعیین ضریب تخصیص بهینه اعتبارات استانی با توجه به درجه و شاخص توسعه‌یافتگی هر استان است. این بعد اساسی در مطالعات پیشین کمتر مورد توجه قرار

-
1. Numerical Taxonomy Analysis
 2. Cluster Analysis
 3. Factor Analysis
 4. TOPSIS

گرفته است و روش‌های مذکور نظیر تحلیل عاملی، تاکسونومی و تاپسیس قابلیت تعیین ضرایب تخصیص بهینه اعتبارات براساس بهینه‌سازی و حداکثرسازی رفاه اجتماعی را ندارند. از این رو، عمده تلاش این مطالعه ارائه مدلی مبتنی بر پایه‌های بهینه‌سازی خرد اقتصادی جهت تعیین ضرایب تخصیص بهینه اعتبارات و منابع مالی و بودجه‌ای در سطح استانی با توجه به درجه توسعه‌یافتگی و شاخص‌های کلان استانی است. الگوها و مدل‌های مختلفی جهت تعیین ضرایب تخصیص بهینه اعتبارات استانی وجود دارد. برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی، برنامه‌ریزی آرمانی^۱، رویکرد مبتنی بر کنترل بهینه^۲ و برنامه‌ریزی پویا^۳ جزء روش‌های متعارف ریاضی در مسائل تخصیص بهینه محسوب می‌گردد. مدل‌های مبتنی بر بهینه‌سازی پویا و با تمرکز بر تابع رفاه اجتماعی، با برخورداری از پایه‌های خرد اقتصادی، ضمن تبیین شرط تعادل بلندمدت سیستم، پویایی‌های جواب بهینه را در کوتاه‌مدت که بیانگر مسیر بهینه حرکت متغیرهای هدف مسئله است، تضمین می‌نماید. در این راستا، در این مطالعه یک مدل پویای مبتنی بر نظریه کنترل بهینه و با به‌کارگیری تحلیل سلسله‌مراتبی در اولویت‌بندی شاخص‌های استانی برای اختصاص بودجه، جهت توزیع بهینه اعتبارات استانی با توجه به رتبه و سطح توسعه‌یافتگی استان‌ها و براساس ماتریس مقایسات زوجی^۴ استانی طراحی می‌گردد. این مدل ضمن توجه به اولویت‌های استانی، منابع بودجه‌ای را در راستای حداکثرسازی رفاه اجتماعی به صورت استانی تخصیص می‌دهد. شایان ذکر است که مدل ارائه شده فرض می‌نماید که فرآیند تخصیص بودجه براساس مهارت‌ها، پتانسیل‌ها و وضعیت و شاخص‌های هر استان باشد و با این فرض نشان می‌دهد که یک مدل کنترل بهینه پویا که اصول کارآمدی و برابری و پایداری را تضمین کند، قابل تصور و مدل‌سازی است، در صورتی که می‌دانیم فرآیند بودجه‌ریزی در ایران به صورت متمرکز و براساس نظر کارشناسی یک تیم تخصیص مرکزی است.

۲. ادبیات موضوع

بودجه‌ریزی ابزاری راهبردی برای انضباط مالی و اقتصادی دولت‌هاست و زمینه دولت شایسته و پاسخگو را فراهم می‌کند و مشارکت شهروندان را برمی‌انگیزد (آذر و همکاران، ۱۳۹۳). مهم‌ترین بعد فرآیند بودجه‌ریزی تخصیص بهینه منابع است که به عنوان ابزاری جهت بهبود عملکرد مالی دولت،

1. Goal programming
2. Optimal Control
3. Dynamic Programming
4. Paired Comparison Analysis

کاهش نابرابری‌ها و افزایش رشد و توسعه متوازن اقتصادی مناطق محسوب می‌گردد. بررسی‌های منطقه‌ای در ایران نشان می‌دهد که برخی از مناطق در مقایسه با سایر مناطق از سطح توسعه‌یافتگی بالاتری برخوردار بوده و لذا توسعه نواحی کشور به صورت نامتوازن شکل گرفته است.

بدین ترتیب، سنجش درجه توسعه‌یافتگی مناطق مختلف کشور در مطالعات زیادی مورد توجه قرار گرفته است. رضوانی (۱۳۸۱) در یک طرح پژوهشی در مؤسسه جغرافیای دانشگاه تهران، استان‌های کشور را با استفاده از ۲۴ شاخص در زمینه آموزش، بهداشت و درمان، ارتباطات و ساختمان، با استفاده از تحلیل تاکسونومی درجه‌بندی کرده است. عرب مازار و حسینی نژاد (۱۳۸۳) در مطالعه‌ای تجربی، میزان فقر و شدت آن را در گروه‌های مختلف شغلی خانوارهای روستایی مورد بررسی قرار داده‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که شدت فقر در میان ساکنان مناطق شرقی کشور از سایر مناطق بیشتر است. نسترن و فتاحی (۱۳۸۸) با بهره‌گیری از تکنیک تحلیل عاملی و با تکیه بر ۳۸ شاخص عمده جمعیتی، آموزشی، زیربنایی، اقتصادی، کشاورزی و صنعت و معدن شهرستان‌های استان گلستان را از نظر شاخص‌های توسعه‌یافتگی درجه‌بندی کرده‌اند. در این مطالعه، ۲۶۸ شاخص را در قالب ۴۵ برنامه جهت تخصیص بهینه اعتبارات به کار گرفته است. حاتمی نژاد و همکاران (۱۳۹۰) به منظور تعیین درجه و سطوح توسعه‌یافتگی صنعتی مناطق مرزی از تحلیل تاکسونومی براساس ۸ شاخص عمده توسعه صنعتی بهره گرفته‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که نزدیکی به مرزهای بین‌المللی بر میزان توسعه‌یافتگی مناطق تأثیرگذار نبوده و تفاوت‌های قومی و زبانی عامل مؤثر بر سطح توسعه‌یافتگی مناطق مرزی مورد مطالعه است. سپهر دوست (۱۳۹۰) نیز استان‌های کشور را از نظر توسعه شاخص‌های سلامت با بهره‌گیری از روش تحلیل تاکسونومی درجه‌بندی نموده است. وی از ۱۸ شاخص عمده در زمینه بهداشت و سلامت طی سال‌های ۱۳۸۵ تا ۱۳۸۷ ش، بهره گرفته است. در مطالعه‌ای دیگر، اسلامی (۱۳۹۱) درجه توسعه‌یافتگی استان‌های کشور را در دو مقطع ۱۳۷۵ و ۱۳۸۵ ش با استفاده از روش تاپسیس و تحلیل تاکسونومی محاسبه نموده است. بر پایه نتایج این مطالعه، اگرچه متوسط درجه توسعه‌یافتگی استان‌ها از سال ۱۳۷۵ تا ۱۳۸۵ ش افزایش پیدا کرده است، اما شکاف درجه توسعه‌یافتگی میان استان‌ها طی این ده سال افزایش یافته است. به طور مشابه در مطالعه‌ای دیگر، زینل‌زاده و همکاران (۱۳۹۱) با استفاده از تکنیک تاکسونومی عددی درجه توسعه‌یافتگی استان‌های کشور را از دید ۱۶۱ شاخص توسعه انسانی و آموزشی در سال‌های ۱۳۸۷ و ۱۳۸۸ ش مورد بررسی قرار داده‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که در هر دو مقطع زمانی مورد مطالعه، استان‌های تهران و سیستان و بلوچستان از نظر شاخص‌های مذکور به ترتیب در رتبه‌های اول و آخر قرار دارند. همچنین، پورمحمدی و همکاران (۱۳۹۱) با تمرکز بر ۱۷

شاخص بهداشتی، درمانی، فرهنگی، مذهبی، گردشگری و زیرساختی براساس اطلاعات سال ۱۳۸۸ ش و با استفاده از تکنیک تاپسیس به سطح بندی و رتبه بندی شهرستان های استان کرمانشاه پرداخته اند. نتایج آنها بیانگر شکاف زیاد بین شهرستان های این استان و توسعه نامتعادل استان است. سرانجام، حسین-آبادی (۱۳۹۲) در مطالعه صورت گرفته در امور آمایش و توسعه منطقه ای معاونت برنامه ریزی و نظارت راهبردی ریاست جمهوری، مروری بر روش های مختلف رتبه بندی و سطح بندی مناطق و شاخص های نابرابری منطقه ای انجام داده است. وی روش های مذکور را در قالب مدل های تصمیم گیری چند شاخصه و چند معیاره و روش های خوشه بندی و، همچنین، ارائه شاخص های نابرابری ارائه نموده است. به طور خلاصه، مطالعات پیشین مذکور از روش هایی استفاده کرده اند که عموماً ناپارامتریک بوده و از پایه های بهینه سازی ریاضی برخوردار نیستند. این مطالعات عمدتاً به سطح بندی و تعیین درجه توسعه یافتگی مناطق و استان های کشور پرداخته اند و روشی را جهت تخصیص بهینه منابع مالی و بودجه ای براساس درجه توسعه یافتگی مناطق و شاخص های عمده اقتصادی، اجتماعی و فرهنگی استانی ارائه نکرده اند.

در زمینه تخصیص بودجه استانی نیز، بر پایه روش های مختلف، مطالعاتی صورت گرفته است. به عنوان مثال، نمازی و کمالی (۱۳۸۱) مدل برنامه ریزی آرمانی را به منظور تخصیص بهینه اعتبارات به استان فارس مورد استفاده قرار داده اند. نتایج آنها نشان می دهد که مدل پیشنهادی قادر به تخصیص بهینه براساس محدودیت های تعیین شده می باشد. در مطالعه ای دیگر، جدیدی میاندشتی (۱۳۸۳) ضمن ارائه روشی برای سطح بندی درجه توسعه یافتگی مناطق و تخصیص اعتبارات استانی، بردار تخصیص اعتبارات استانی را محاسبه کرده است و سهم هر استان از اعتبارات را به درصد برآورد کرده است. در این مطالعه، شاخص های جمعیتی، تعداد شهرها و ساختار شهرها را در تعیین درجه توسعه یافتگی استان-ها، براساس اطلاعات سال ۱۳۷۸ ش، مورد استفاده قرار داده است. اشکال عمده این روش پیشنهادی، نبود مبانی بهینه سازی ریاضی و مفاهیم خرد اقتصادی در تحلیل است. محقر و همکاران (۱۳۸۵)، از یک مدل برنامه ریزی ریاضی مبتنی بر تصمیم گیری چند معیاره برای تخصیص بهینه اعتبارات عمرانی شهرستان های استان خراسان بهره گرفته اند. نتایج حاصل از مدل و مقایسه آن با وضع موجود نشان می دهد که روش جاری تخصیص بودجه بهینه نیست. عابدی و همکاران (۱۳۸۶) برای تخصیص بهینه بودجه در بخش های آموزش دانشگاهی و بهداشت و درمان، مدل برنامه ریزی آرمانی را مورد استفاده قرار داده اند. رجبی (۱۳۸۹) نیز در مطالعه ای، روش های برنامه ریزی آرمانی، منطبق فازی و تحلیل سلسله مراتبی را به منظور تخصیص بهینه بودجه وزارت بهداشت به استان های کشور ترکیب کرده است.

انتظاری (۱۳۸۹) به تحلیل عملکرد تخصیص بودجه به دانشگاه‌های ایران از دو منظر درآمد و هزینه برای ۵۲ دانشگاه وابسته به وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، طی سال‌های ۱۳۸۵، ۱۳۸۶ و ۱۳۸۷، پرداخته است. برای این منظور، از الگوی رفتاری جدیدی با عنوان مرز تصادفی بودجه با رویکرد تخصیص مبتنی بر ستانده استفاده نموده است. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که فرضیه صفر درخصوص ضرایب کمیت و کیفیت بیشتر ستانده‌ها رد نمی‌شود و لذا متغیرهای یادشده نقشی در تخصیص بودجه به دانشگاه‌های کشور ایفا نمی‌کنند. در نهایت، آذر و همکاران (۱۳۸۹)، یک مدل بهینه‌سازی ریاضی مبتنی بر روش تصمیم‌گیری چند معیاره را برای تخصیص بودجه دولتی شهرداری-های کشور طراحی نموده‌اند. نتایج حاصل از مدل و مقایسه آن با روش فعلی سازمان مدیریت و برنامه‌ریزی بیانگر غیر بهینه بودن رویه جاری تخصیص بودجه است.

در ادامه این بخش مروری بر چند مطالعه تجربی خارجی صورت می‌پذیرد. کواک و دیمینی^۱ (۱۹۸۷) یک مدل مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی را در راستای تخصیص بودجه عملیاتی واحدهای دانشگاهی در کشور امریکا طراحی و مورد استفاده قرار داده‌اند. در مطالعه‌ای دیگر کواک و لی^۲ (۱۹۹۷)، مدل مبتنی بر رویکرد تحقیق در عملیات را به منظور تخصیص بهینه منابع انسانی در بخش بهداشت و سلامت مورد استفاده قرار داده‌اند. عزیز و شریف^۳ (۲۰۰۵) در مطالعه‌ای تجربی، مدل برنامه‌ریزی آرمانی را جهت برنامه‌ریزی و تخصیص پرستاران در عربستان سعودی مورد استفاده قرار داده‌اند. فراچتر و دو^۴ (۲۰۰۵)، با بهره‌گیری از رویکرد کنترل بهینه و برنامه‌ریزی پویا به تخصیص بودجه تبلیغات اینترنتی در طی زمان پرداخته‌اند. همچنین وی و وو^۵ (۲۰۰۷) در مطالعه‌ای برای تخصیص بهینه منابع در صنعت حمل و نقل کشور تایوان از مدل ترکیبی مبتنی بر تحلیل سلسله مراتبی و برنامه‌ریزی ریاضی بهره گرفته‌اند. در پایان، یانگ و همکاران^۶ (۲۰۱۶) از رویکرد کنترل بهینه در نظریه بازی‌های دیفرانسیل‌پذیر جهت تخصیص بهینه بودجه تبلیغات بهره گرفته‌اند و به سطح تعادلی بودجه تبلیغات دست پیدا کرده‌اند.

-
1. Kwak, N.K. and Diminnie, C.B.
 2. Kwak, N.K. and Lee, Ch.
 3. Azaiez, M.N. and Sharif, A.L.S.S.
 4. Fruchter, G.E. and Dou, W.
 5. Wey, W.M. and Wu, K.Y.
 6. Yang, Y. and Liu, D.

۳. معرفی مدل

ابتدا فرض می‌شود که سهم بودجه استان i ام از کل بودجه در دوره زمانی جاری با $x_i(t)$ نمایش داده شود، این متغیر مقداری را بین صفر و یک اختیار نموده و میزان رضایت مندی و مطلوبیت کل جامعه براساس آن سنجیده می‌شود. حال به منظور تخصیص بهینه اعتبارات بودجه به صورت استانی و بر پایه شاخص‌های عمده هر استان، مدل کنترل بهینه زیر طراحی شده است.

$$\max W = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} u(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (1)$$

s.t.:

$$\sum_{i=1}^N x_i(t) = 1 \quad 0 \leq x_i(t) \leq 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t) = 0 \quad (3)$$

معادله (۱)، بیانگر تابع رفاه اجتماعی بخش خانوار است که به صورت انتگرالی و طی ادوار زندگی تعریف شده است. معادله (۲) بیانگر آن است که مجموع تسهیم بودجه بین N استان مورد مطالعه برابر با یک می‌باشد و معادله (۳) نشان می‌دهد که مجموع تغییرات سهم بودجه استانی‌ها طی زمان باید برابر با صفر باشد. به بیانی ساده‌تر اگر طی زمان به سهم بودجه استان یا استان‌های افزوده شود به وضوح سهم دیگر استان‌ها کاهش پیدا خواهد کرد. در تابع رفاه رابطه (۱)، β بیانگر عامل تنزیل ذهنی است و $u(\cdot)$ بیانگر تابع مطلوبیت بخش خانوار است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$u(x(t), \dot{x}(t), t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \log(x_i(t) + \dot{x}_i(t)) \quad (4)$$

که در آن، $\log(\cdot)$ بیانگر لگاریتم طبیعی است. این تابع مطلوبیت یک تبدیل یکنواخت^۱ از تابع مطلوبیت کاب-داگلاس است. لذا تمامی ویژگی‌های آن تابع را داراست. تابع مطلوبیت تعریف شده بیان می‌کند که هر کدام از استان‌ها به اندازه مجموع سهم بودجه $(x_i(t))$ به علاوه مازاد (کسری) تخصیص یافته بودجه طی دوره جاری $(\dot{x}_i(t) = dx_i(t)/dt)$ مطلوبیت کسب می‌نماید. در تابع مطلوبیت تعریف شده، α_i به عنوان فاکتور نماینده همگی شاخص‌های استانی دخیل در بودجه‌ریزی و

فرایند تخصیص بودجه نقش مهمی را بازی می‌کند. مسئله طراحی شده در بالا یک مسئله کنترل بهینه است. به منظور حل این مدل از روش حساب تغییرات^۱ و معادله اولر^۲ بهره گرفته خواهد شد.

۳-۱. حل مدل در حالت دو استان

به منظور حل مدل، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که تعداد استان‌ها برابر با ۲ باشد یعنی $N = 2$. در این راستا، تابع هدف مقید به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

$$g_a = e^{-\beta t} [\alpha_1 \log(x_1(t) + \dot{x}_1(t)) + \alpha_2 \log(x_2(t) + \dot{x}_2(t))] \quad (5)$$

$$+ p_1(t) \{x_1(t) + x_2(t) - 1\} + p_2(t) \{\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t)\}$$

معادله اولر برای حل این مسئله به صورت زیر است (کیرک^۳، ۱۹۹۸):

$$\frac{\partial g_a}{\partial x_i(t)} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_i(t)} \right\} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

با انجام محاسبات مربوط به مشتق‌گیری جزئی و جاگذاری در رابطه (۶) به دست می‌آوریم:

$$\frac{\alpha_1 e^{-\beta t}}{x_1(t) + \dot{x}_1(t)} + p_1(t) - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\alpha_1 e^{-\beta t}}{x_1(t) + \dot{x}_1(t)} + p_2(t) \right\} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\alpha_1 e^{-\beta t}}{x_2(t) + \dot{x}_2(t)} + p_1(t) - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\alpha_1 e^{-\beta t}}{x_2(t) + \dot{x}_2(t)} + p_2(t) \right\} = 0 \quad (8)$$

با ساده‌سازی می‌توان به دست آورد:

$$\frac{\alpha_1 e^{-\beta t}}{x_1(t) + \dot{x}_1(t)} + p_1(t) - \frac{\alpha_1 \beta e^{-\beta t} (x_1(t) + \dot{x}_1(t)) - \alpha_1 e^{-\beta t} (\dot{x}_1(t) + \ddot{x}_1(t))}{(x_1(t) + \dot{x}_1(t))^2} - \dot{p}_2(t) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\alpha_2 e^{-\beta t}}{x_2(t) + \dot{x}_2(t)} + p_1(t) - \frac{\alpha_2 \beta e^{-\beta t} (x_2(t) + \dot{x}_2(t)) - \alpha_2 e^{-\beta t} (\dot{x}_2(t) + \ddot{x}_2(t))}{(x_2(t) + \dot{x}_2(t))^2} - \dot{p}_2(t) = 0 \quad (10)$$

در روابط (۹) و (۱۰)، $\ddot{x}_i(t) = d^2 x_i(t) / dt^2$ می‌باشد.

۳-۱-۲. جواب بلندمدت

-
1. Calculus of Variation
 2. Euler Equation
 3. Kirk, D.

در بلندمدت، $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0$ لذا $\ddot{x}_1(t) = \ddot{x}_2(t) = 0$ ؛ از این رو، روابط (۹) و (۱۰) را می توان ترکیب و به صورت زیر ساده کرد:

$$\frac{\alpha_1}{x_1(t)} - \frac{\alpha_1\beta}{x_1(t)} = \frac{\alpha_2}{x_2(t)} - \frac{\alpha_2\beta}{x_2(t)} \quad (۱۱)$$

که این نتیجه می دهد:

$$\frac{\alpha_1}{x_1(t)} = \frac{\alpha_2}{x_2(t)} \quad (۱۲)$$

با ترکیب این رابطه با معادله $x_1(t) + x_2(t) = 1$ ، جواب نهایی بهینه سازی به دست می آید.

$$x_1^* = \frac{(\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^2}{1 + (\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^2} \quad (۱۳)$$

$$x_2^* = 1 / (1 + (\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^2) \quad (۱۴)$$

۳-۱-۱. جواب کوتاه مدت

به منظور دستیابی به جواب کوتاه مدت یا مسیر بهینه حرکت سهم بودجه استانها، معادلات (۹) و (۱۰) را ترکیب و براساس قیود مسئله ساده سازی می کنیم:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_1}{x_1(t) + \dot{x}_1(t)} - \frac{\alpha_1\beta(x_1(t) + \dot{x}_1(t)) - \alpha_1(\dot{x}_1(t) + \ddot{x}_1(t))}{(x_1(t) + \dot{x}_1(t))^2} \\ & = \frac{\alpha_2}{x_2(t) + \dot{x}_2(t)} - \frac{\alpha_2\beta(x_2(t) + \dot{x}_2(t)) - \alpha_2(\dot{x}_2(t) + \ddot{x}_2(t))}{(x_2(t) + \dot{x}_2(t))^2} \end{aligned} \quad (۱۵)$$

از آنجا که $x_1(t) = 1 - x_2(t)$ ، $\dot{x}_1(t) = -\dot{x}_2(t)$ و $\ddot{x}_1(t) = -\ddot{x}_2(t)$ و همچنین

$(1 - \alpha_1) = \alpha_2$ ، پس معادله (۱۳) در نهایت به فرم زیر قابل ساده سازی و بازنویسی است:

$$\left[\frac{1 - x_1(t) - \dot{x}_1(t)}{x_1(t) + \dot{x}_1(t)} \right]^2 = \frac{(1 - \alpha_1) \{ (1 - \beta)(1 - x_1(t) - \dot{x}_1(t)) - \dot{x}_1(t) - \ddot{x}_1(t) \}}{\alpha_1 \{ (1 - \beta)(x_1(t) + \dot{x}_1(t)) + \dot{x}_1(t) + \ddot{x}_1(t) \}} \quad (۱۶)$$

با تغییر یک متغیر به صورت $u(t) = x_1(t) + \dot{x}_1(t)$ ، می توان معادله (۱۶) را به یک معادله

دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی با ضرایب متغیر تبدیل نمود. این فرآیند به صورت زیر است:

$$\left[\frac{1 - u(t)}{u(t)} \right]^2 = \frac{(1 - \alpha_1) \{ (1 - \beta)(1 - u(t)) - \dot{u}(t) \}}{\alpha_1 \{ (1 - \beta)u(t) + \dot{u}(t) \}} \quad (۱۷)$$

با تعریف $\varphi = \frac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1}$ و ساده‌سازی معادله (۱۷) به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\varphi} \left[\frac{1-u(t)}{u(t)} \right]^2 \{ (1-\beta)u(t) + \dot{u}(t) \} = (1-\beta)(1-u(t)) - \dot{u}(t) \quad (18)$$

و داریم:

$$\dot{u}(t) \left\{ 1 + \frac{1}{\varphi} \left[\frac{1-u(t)}{u(t)} \right]^2 \right\} = (1-\beta) - (1-\beta)u(t) \left[1 - \frac{1}{\varphi} \left[\frac{1-u(t)}{u(t)} \right]^2 \right] \quad (19)$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$\left[\frac{1}{(1-\beta)} + \frac{1}{\varphi(1-\beta)} \left[\frac{1-u(t)}{u(t)} \right]^2 \right] \dot{u}(t) + \left[1 - \frac{1}{\varphi} \left[\frac{1-u(t)}{u(t)} \right]^2 \right] u(t) = 1 \quad (20)$$

معادله (۲۰) پویایی کوتاه مدت جواب بهینه را به نمایش می‌گذارد. بر پایه معادله (۲۰) مسیر بهینه سهم استانی بودجه، در یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی و ناهمگن صدق می‌کند. یک جواب عمومی از این معادله دیفرانسیل با در نظر گرفتن شرایط اولیه $\bar{x}_1 = 1 - \bar{x}_2$ و $u(0) = 0$ و $\dot{u}(0) = 0$ براساس روش سری مک‌لورن حول نقطه $t = 0$ به صورت زیر است (نیکوکار، ۱۳۹۰):

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m \quad (21)$$

معادله (۲۱) بیانگر پویایی کوتاه مدت مسیر بهینه تخصیص بودجه استانی در طی زمان می‌باشد.

۲-۳. ساختار شاخص جذب بودجه استانی

یکی از مهم‌ترین اجزای تابع رفاه اجتماعی تعریف شده در مدل، شاخص سهم بودجه استانی (α_i) است. این شاخص به صورت ترکیب خطی زیر تعریف می‌گردد:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^k w_{ij} \beta_{ij} \quad (22)$$

که در آن، k تعداد فاکتورهای مؤثر در توزیع و تخصیص منابع بودجه‌ای است. واضح است که هر چه تعداد شاخص‌ها بیشتر باشد، مدل جامع‌تر و دقیق‌تر خواهد بود. ضمن آنکه β_{ij} نشان‌دهنده مقدار شاخص j ام برای استان i ام است و w_{ij} وزن شاخص j ام در استان i ام است. به منظور محاسبه اوزان استانی شاخص‌ها از تحلیل سلسله مراتبی بهره خواهیم گرفت. در تحلیل سلسله مراتبی برای هر کدام از استان‌ها یک ماتریس مربعی تعریف می‌گردد که ماتریس مقایسات زوجی نامیده می‌-

شود که با Λ_i نشان می‌دهیم که ماتریسی مربعی از مرتبه تعداد شاخص‌هاست و چنین تعریف می‌شود (مؤمنی، ۱۳۸۹):

$$\Lambda_i = [\theta_{ij}]_{i,j=1}^K \quad (23)$$

در معادله (۲۳)، θ_{ij} بیانگر ضریب ترجیح شاخص i به j در استان مربوطه است. با توجه به تعریف، درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس یک و سایر درایه‌ها دو به دو نسبت به قطر اصلی معکوس همدیگرند. بردار اوزان استانی شاخص‌ها در رابطه (۲۲) برابر با بردار ویژه مربوط به ماکسیمم مقدار ویژه ماتریس Λ_i است (مؤمنی، ۱۳۸۹). پس اگر λ_{\max} بیانگر بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس Λ_i باشد، آنگاه:

$$\Lambda_i w_i = \lambda_{\max} w_i \quad (24)$$

$$\beta_{11} + \beta_{21} = 1 \quad (25)$$

$$\beta_{12} + \beta_{22} = 1$$

پس بردار مقادیر شاخص‌های استانی را نرمال‌سازی می‌کنیم. برای این منظور روابط زیر را تعریف

می‌کنیم:

$$\beta'_{11} = \frac{\beta_{11}}{\beta_{11} + \beta_{21}} \quad \beta'_{21} = \frac{\beta_{21}}{\beta_{11} + \beta_{21}} \quad (26)$$

$$\beta'_{12} = \frac{\beta_{12}}{\beta_{12} + \beta_{22}} \quad \beta'_{22} = \frac{\beta_{22}}{\beta_{12} + \beta_{22}} \quad (27)$$

حال می‌توان شرط $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ را با مقادیر نرمال‌سازی شده شاخص‌ها تضمین کرد.

$$\alpha_1 = [\beta'_{11} \quad \beta'_{12}] \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = [\beta'_{21} \quad \beta'_{22}] \begin{bmatrix} w_{21} \\ w_{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

۳-۳. تعمیم راه حل

جواب تعادلی بلندمدت مدل در حالت دو استانی براساس روابط (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) به حالتی که تعداد استان مورد مطالعه باشد، قابل تعمیم است. برای این منظور بر پایه معادله اول در حالت $N = 3$ متغیره، روابط زیر در بلندمدت برقرار است:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (۲۹)$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \quad (۳۰)$$

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \quad (۳۱)$$

به منظور به دست آوردن مقادیر بهینه متغیرها، روابط بالا را با رابطه $1 = x_1 + x_2 + x_3$ ترکیب می‌نماییم و پس از تشکیل دستگاه معادله، به دست می‌آوریم:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۳۲)$$

به همین این ترتیب در حالت N متغیره، فرم ماتریسی ضرایب تخصیص بهینه اعتبارات مالی به

صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} & 0 & . & . & 0 \\ . & 0 & 1 & -\frac{\alpha_4}{\alpha_3} & 0 & . & . \\ . & . & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & -\frac{\alpha_N}{\alpha_{N-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۳۳)$$

رابطه (۳۳) شرط تعادلی بلند مدت مدل کنترل بهینه طراحی شده را در حالت تعمیم یافته به نمایش می‌گذارد. به طوری که در رابطه (۳۲)، معادله زیر برقرار است:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^k w_{ij} \beta_{ij} \quad (34)$$

طوری که:

$$\sum_{i=1}^N \beta'_{ij} = 1 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, k \quad (35)$$

$$\beta'_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\sum_{i=1}^N \beta_{ij}} \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, k \quad (36)$$

۴. حل مدل برای ایران

در این بخش مدل ارائه شده را برای استان‌های ایران عملیاتی خواهیم نمود. برای این منظور مدل را با تمرکز بر ۱۲ شاخص کلان حل نموده و بردار ضرایب تخصیص بهینه استانی منابع مالی بودجه‌ای را براساس رابطه تعادلی (۳۷) که بیانگر نقطه تعادل بلندمدت مدل کنترل بهینه پویای طراحی شده است، محاسبه می‌کنیم. ۱۲ شاخص کلان مورد توجه در این مطالعه شامل نرخ مرگ و میر، سهم جمعیتی، نرخ بیکاری، ضریب جینی، نرخ باسوادی، ضریب نفوذ اینترنت، نرخ مشارکت اقتصادی، سهم تولید داخلی استانی به کل کشور و نسبت ارزش افزوده بخش کشاورزی، خدمات و صنعت استان به کل کشور، شاخص وزنی امکانات آموزشی شامل تعداد مدارس، تعداد کلاس و تعداد معلمان به ازای هر ۱۰۰ نفر و، سرانجام، شاخص وزنی امکانات بهداشتی شاخص تعداد تخت بیمارستان، تعداد پزشکان و تعداد پرستاران و پیراپزشکان به ازای هر ۱۰۰ نفر در سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳ می‌باشد. اطلاعات مربوط به این ۱۲ شاخص از مرکز آمار ایران اخذ شده است. تعداد استان‌های کشور در سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳ برابر با ۳۱ است و، بنابراین، $k = 12$ و $N = 31$. در جدول شماره (۱)، اطلاعات مذکور برای سال ۱۳۹۰ ارائه شده است. این اطلاعات امکان ایجاد مقایسه نسبی شاخص‌های وضعیتی و عملکردی استان‌های کشور را در سال ۱۳۹۰ فراهم می‌سازد.

۲۰ فصلنامه پژوهش‌ها و سیاست‌های اقتصادی شماره ۷۹

جدول ۱. اطلاعات استانی مورد استفاده (سال ۱۳۹۰)

استان	نرخ مرگ و میر	سهم جمعیتی	نرخ بیکاری	ضریب جینی	نرخ باسوادی	شاخص آموزشی	نرخ مشارکت اقتصادی	سهم استان از تولید داخلی	سهم استان از ارزش افزوده بخش کشاورزی	سهم استان از ارزش افزوده بخش معدن	سهم استان از ارزش افزوده بخش صنعت	شاخص امکانات بهداشتی
آ.ش.	۰/۰۲۹	۰/۰۵	۰/۰۸۱	۰/۳۶۷	۰/۸۲۱	۰/۱۹۹	۰/۴۱۱	۰/۰۳۶	۰/۰۴۹	۰/۰۰۴	۰/۰۵۰	۰/۲۳۱
آ.غ.	۰/۰۳۸	۰/۰۴	۰/۰۹۸	۰/۳۳۸	۰/۷۸۸	۰/۱۹۸	۰/۳۹۹	۰/۰۲۱	۰/۰۴۴	۰/۰۰۱	۰/۰۱۱	۰/۱۹۲
اردبیل	۰/۰۳۷	۰/۰۲	۰/۱۲۱	۰/۳۲۹	۰/۸۰۸	۰/۲۳۴	۰/۴۰۳	۰/۰۱۱	۰/۰۲۶	۰/۰۰	۰/۰۰۴	۰/۲۳۶
اصفهان	۰/۰۴۱	۰/۰۷	۰/۱۱۸	۰/۳۲۸	۰/۸۷۸	۰/۱۷۸	۰/۴۰۱	۰/۰۷۰	۰/۰۴۲	۰/۰۰۳	۰/۱۳۷	۰/۲۳۳
البرز	۰/۰۳۹	۰/۰۳	۰/۰۹۶	۰/۲۷۲	۰/۹۰۲	۰/۱۵۶	۰/۳۴۲	۰/۰۲۶	۰/۰۱۵	۰/۰۰	۰/۰۳۴	۰/۰۸۱
ایلام	۰/۰۳۱	۰/۰۱	۰/۰۸۷	۰/۳۴۰	۰/۸۲۳	۰/۲۶۰	۰/۳۶۵	۰/۰۰۷	۰/۰۰۹	۰/۰۳۵	۰/۰۰۱	۰/۲۷۹
بوشهر	۰/۰۳۸	۰/۰۱	۰/۰۷۸	۰/۳۱۹	۰/۸۳۶	۰/۲۰۹	۰/۳۶۳	۰/۰۳۶	۰/۰۱۶	۰/۰۴۱	۰/۰۷۸	۰/۲۳۹
تهران	۰/۰۳۰	۰/۱۶	۰/۱۱۴	۰/۳۵۲	۰/۹۰۳	۰/۱۴۸	۰/۳۹۲	۰/۲۴۵	۰/۰۳۹	۰/۰۰۴	۰/۱۴۵	۰/۱۴۲
چهارمحال و بختیاری	۰/۰۴۵	۰/۰۱	۰/۱۴۱	۰/۳۳۴	۰/۸۲۵	۰/۲۵۰	۰/۳۷۸	۰/۰۰۷	۰/۰۱۶	۰/۰۰	۰/۰۰۶	۰/۳۲۲
خراسان جنوبی	۰/۰۴۵	۰/۰۱	۰/۰۷۴	۰/۳۲۰	۰/۸۲۵	۰/۲۷۸	۰/۳۶۵	۰/۰۰۵	۰/۰۱۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۳	۰/۲۳۵
خراسان رضوی	۰/۰۴۳	۰/۰۸	۰/۰۸۹	۰/۳۲۷	۰/۸۶۳	۰/۲۲۴	۰/۳۶۴	۰/۰۵۵	۰/۰۷۶	۰/۰۰۲	۰/۰۳۰	۰/۱۹۳
خراسان شمالی	۰/۰۴۳	۰/۰۱	۰/۱۳۵	۰/۳۳۲	۰/۸۰۳	۰/۲۵۳	۰/۴۳۱	۰/۰۰۶	۰/۰۱۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۵	۰/۱۸۷
خوزستان	۰/۰۴۶	۰/۰۶	۰/۰۹۶	۰/۳۳۷	۰/۸۳۵	۰/۲۳۷	۰/۳۴۶	۰/۱۰۴	۰/۰۵۸	۰/۴۴۴	۰/۱۴۵	۰/۲۱۱
زنجان	۰/۰۳۸	۰/۰۱	۰/۰۸۷	۰/۲۸۴	۰/۸۲۳	۰/۲۰۴	۰/۳۷۳	۰/۰۰۹	۰/۰۲۱	۰/۰۰۲	۰/۰۱۲	۰/۲۵۷
سمنان	۰/۰۳۱	۰/۰۱	۰/۰۷۸	۰/۳۳۳	۰/۸۸۴	۰/۱۸۳	۰/۳۹۴	۰/۰۰۹	۰/۰۱۶	۰/۰۰۱	۰/۰۱۱	۰/۳۳۴
سیستان	۰/۰۷۱	۰/۰۳	۰/۱۱۱	۰/۴۰۱	۰/۷۱۵	۰/۲۶۷	۰/۲۹	۰/۰۱۴	۰/۰۲۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۵	۰/۱۹۸
فارس	۰/۰۳۶	۰/۰۶	۰/۱۰۱	۰/۳۵۷	۰/۸۶۳	۰/۲۰۱	۰/۳۵۹	۰/۰۴۸	۰/۰۸۷	۰/۰۱۰	۰/۰۴۱	۰/۲۵۷
قزوین	۰/۰۳۴	۰/۰۲	۰/۱۴	۰/۲۷۴	۰/۸۴۱	۰/۱۸۵	۰/۴۱۶	۰/۰۱۵	۰/۰۲۴	۰/۰۰	۰/۰۳۰	۰/۱۸۵

توزیع بهینه منابع بودجه استانی بر پایه یک مدل کنترل بهینه ۲۱

استان	نرخ مرگ و میر	سهم جمعیتی	نرخ بیکاری	ضریب جینی	نرخ باسوادی	شاخص آموزشی	نرخ مشارکت اقتصادی	سهم استان از تولید داخلی	سهم استان از بخش کشاورزی	سهم استان از بخش معدن	سهم استان از بخش صنعت	شاخص امکانات بهداشتی
قم	۰/۰۳۷	۰/۰۲	۰/۰۸۱	۰/۳۵۹	۰/۸۶۶	۰/۱۷۸	۰/۳۳	۰/۰۱۱	۰/۰۰۹	۰/۰۰	۰/۰۱۱	۰/۱۷۵
کردستان	۰/۰۳۷	۰/۰۲	۰/۱۱۱	۰/۳۱۱	۰/۷۷۹	۰/۲۱۵	۰/۴۰۷	۰/۰۱۰	۰/۰۱۹	۰/۰۰۱	۰/۰۰۴	۰/۲۱۵
کرمان	۰/۰۳۹	۰/۰۴	۰/۰۸۴	۰/۳۳۲	۰/۸۲۲	۰/۲۴۸	۰/۳۳۸	۰/۰۳۱	۰/۰۷۵	۰/۰۴۶	۰/۰۳۳	۰/۲۳۰
کرمانشاه	۰/۰۳۵	۰/۰۳	۰/۱۵۳	۰/۳۴۱	۰/۸۱۷	۰/۲۱۶	۰/۳۶۹	۰/۰۱۸	۰/۰۲۲	۰/۰۰	۰/۰۱۸	۰/۲۳۱
کهگیلویه	۰/۰۴۷	۰/۰۱	۰/۱۲۷	۰/۳۰۵	۰/۸۱۹	۰/۳۲۳	۰/۲۹۲	۰/۰۱۵	۰/۰۰۹	۰/۱۰۲	۰/۰۰۱	۰/۲۶۷
گلستان	۰/۰۴۵	۰/۰۲	۰/۱۲۳	۰/۳۸۱	۰/۸۳	۰/۱۹۳	۰/۳۶۶	۰/۰۱۲	۰/۰۳۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۶	۰/۲۲۹
گیلان	۰/۰۲۶	۰/۰۳	۰/۱۲۳	۰/۳۱۲	۰/۸۴۳	۰/۲۰۵	۰/۳۷۸	۰/۰۲۲	۰/۰۳۱	۰/۰۰	۰/۰۱۵	۰/۲۵۰
لرستان	۰/۰۴۲	۰/۰۲	۰/۱۴۹	۰/۳۰۷	۰/۸۰۴	۰/۲۴۱	۰/۳۵۴	۰/۰۱۳	۰/۰۳۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۵	۰/۲۲۰
مازندران	۰/۰۲۹	۰/۰۴	۰/۱۳۸	۰/۳۰۹	۰/۸۵۷	۰/۱۹۳	۰/۳۸۱	۰/۰۳۵	۰/۰۸۶	۰/۰۰۱	۰/۰۲۴	۰/۲۸۱
مرکزی	۰/۰۳۰	۰/۰۲	۰/۰۵۵	۰/۳۴۵	۰/۸۳۸	۰/۱۸۱	۰/۳۶۷	۰/۰۲۲	۰/۰۳۳	۰/۰۰۳	۰/۰۵۴	۰/۲۲۶
هرمزگان	۰/۰۴۶	۰/۰۲	۰/۰۷۴	۰/۲۸۸	۰/۸۳۷	۰/۲۴۴	۰/۳۲۲	۰/۰۲۵	۰/۰۲۲	۰/۰۰۳	۰/۰۴۷	۰/۲۱۰
همدان	۰/۰۳۶	۰/۰۲	۰/۰۶۴	۰/۳۴۳	۰/۸۲۶	۰/۱۸۹	۰/۳۹۴	۰/۰۱۵	۰/۰۳۲	۰/۰۰	۰/۰۱۰	۰/۲۵۵
یزد	۰/۰۴۲	۰/۰۱	۰/۰۶۷	۰/۳۱۶	۰/۸۷۸	۰/۲۱۳	۰/۳۶۹	۰/۰۲۱	۰/۰۲۳	۰/۰۳۳	۰/۰۳۳	۰/۳۳۸

مأخذ: مرکز آمار ایران (۱۳۹۱ و ۱۳۹۲)

روند کار به این صورت است که بعد از نرمال سازی شاخص ها و محاسبه شاخص میزان سهم بودجه ای هر استان و دادن وزن به شاخص ها، بردار ضرایب تخصیص بهینه اعتبارات مالی استان ها که همان نقطه بلندمدت مدل کنترل بهینه طراحی شده است، بر اساس اطلاعات دو سال مختلف ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳ محاسبه می شود.^۱ این نتایج در جدول شماره (۲) ارائه شده است. نتایج ستون دوم جدول شماره (۲) برای حالتی است که ماتریس مقایسات زوجی همگی استان ها یکسان هستند و ضرایب ترجیح برابر به همگی شاخص ها داده شده است. بنابراین، وزن تمامی ۱۲ شاخص مورد استفاده در این مطالعه یکسان در نظر گرفته شده و بر این اساس مقدار وزن هر کدام از شاخص ها برابر با ۰/۰۸۳ است.

۱. محاسبات در محیط نرم افزار MATLAB انجام گرفته است.

جدول ۲. نتایج تخصیص بهینه بودجه به استان‌های کشور براساس مدل پیشنهادی

استان	ضرایب تخصیص بهینه بودجه استانی به درصد (\bar{X}^*) بر پایه اطلاعات سال ۱۳۹۰	سهم واقعی بودجه استان بر پایه اطلاعات سال ۱۳۹۰	ضرایب تخصیص بهینه بودجه استانی به درصد (\bar{X}^*) بر پایه اطلاعات سال ۱۳۹۳	سهم واقعی بودجه استان بر پایه اطلاعات سال ۱۳۹۳
آ.ش.	۲/۷۴	۴/۴۹	۲/۷۵	۴/۰۵
آ.غ.	۳/۳۳	۳/۶۵	۳/۳۶	۳/۱۳
اردبیل	۳/۷۵	۱/۹۰	۳/۸۰	۱/۷۰
اصفهان	۲/۰۰	۵/۳۶	۲/۰۰	۱۳/۷۴
البرز	۳/۷۹	۱/۸۹	۳/۷۲	۱/۸۸
ایلام	۳/۶۸	۱/۵۳	۳/۶۳	۱/۳۴
بوشهر	۲/۷۰	۲/۰۳	۲/۶۹	۶/۵۱
تهران	۳/۳۸	۱۱/۲۶	۳/۴۰	۷/۵۱
چهارمحال	۲/۷۱	۱/۵۶	۲/۷۴	۰/۴۴
خراسان جنوبی	۳/۲۳	۱/۴۶	۳/۲۵	۱/۴۵
خراسان رضوی	۲/۳۸	۶/۲۱	۲/۳۵	۶/۲۳
خراسان شمالی	۳/۹۸	۱/۳۱	۴/۰۶	۱/۴۵
خوزستان	۰/۹۳	۶/۵۴	۰/۹۳	۵/۵۲
زنجان	۴/۱۰	۱/۹۳	۴/۰۷	۱/۵۱
سمنان	۴/۱۰	۱/۳۵	۳/۹۷	۱/۲۹
سیستان	۳/۴۱	۳/۹۱	۳/۴۵	۳/۶۵
فارس	۲/۳۳	۶/۲۷	۲/۳۱	۵/۶۵
قزوین	۳/۵۹	۱/۴۷	۳/۶۹	۱/۳۱
قم	۴/۳۵	۲/۸۶	۴/۲۸	۲/۸۱
کردستان	۴/۰۰	۱/۵۴	۴/۰۰	۱/۳۶
کرمان	۲/۴۰	۲/۶۸	۲/۴۳	۲/۱۶
کرمانشاه	۳/۴۰	۴/۲۱	۳/۴۱	۳/۷۳
کهگیلویه	۲/۶۱	۳/۳۸	۲/۶۲	۲/۷۰
گلستان	۳/۶۲	۲/۳۱	۳/۶۷	۲/۰۴
گیلان	۳/۴۷	۳/۳۸	۳/۴۷	۲/۹۷

استان	ضرایب تخصیص بهینه بودجه استانی به درصد (\bar{X}^*) بر پایه اطلاعات سال ۱۳۹۰	سهم واقعی بودجه استان بر پایه اطلاعات سال ۱۳۹۰	ضرایب تخصیص بهینه بودجه استانی به درصد (\bar{X}^*) بر پایه اطلاعات سال ۱۳۹۳	سهم واقعی بودجه استان بر پایه اطلاعات سال ۱۳۹۳
لرستان	۳/۶۰	۲/۶۲	۳/۶۴	۲/۴۱
مازندران	۲/۶۶	۴/۳۱	۲/۶۹	۳/۷۶
مرکزی	۳/۴۵	۱/۷۱	۳/۴۳	۱/۵۷
هرمزگان	۳/۳۳	۲/۶۲	۳/۲۵	۲/۴۳
همدان	۳/۸۳	۲/۴۴	۳/۸۱	۲/۱۵
یزد	۳/۱۴	۱/۸۱	۳/۱۲	۱/۵۴

مأخذ: محاسبات تحقیق و مرکز آمار ایران (داده‌های بودجه استانی سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳)

همچنان که ملاحظه می‌گردد، مدل پیشنهادی توانایی تخصیص بودجه بهینه به استان‌های کشور را دارد. مقایسه نتایج حاصل از تخصیص بهینه استانی با تخصیص واقعی صورت گرفته در سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳ نشان می‌دهد که بیشترین انحراف بودجه واقعی از تخصیص بهینه بر مبنای مدل پیشنهادی به استان‌های بیشتر توسعه یافته مربوط است. در واقع، براساس جدول (۲)، استان‌های تهران، اصفهان، خراسان رضوی و فارس بالاترین میزان انحراف سهم واقعی از سهم بهینه بودجه را در میان استان‌های کشور داراست. اگر سیاست‌گذار و برنامه‌ریز بودجه به این ۱۲ شاخص توجه یکسان داشته باشد، بر پایه نقطه تعادل بلندمدت مدل کنترل بهینه طراحی شده، استان‌های کمتر توسعه یافته سهم بیشتری از بودجه را به خود اختصاص می‌دهند که مطابق شیوه جاری تخصیص بودجه استانی نیست. در واقع، مقایسه نتایج حاصل از مدل پیشنهادی با وضعیت واقعی در سال‌های مورد مطالعه نشان می‌دهد که روش مورد استفاده در تخصیص بودجه به استان‌های کشور در هیچ یک از دو سال تحت بررسی بهینه نبوده است. پس بازنگری در شیوه جاری تخصیص بودجه که عموماً به صورت تسهیم به نسبت است، ضروری به نظر می‌رسد.

در ادامه این بخش و در جدول شماره (۳) نتایج سه سناریو برای اطلاعات مورد استفاده استانی هر دو سال ۱۳۹۰ و ۱۳۹۳ ارائه شده است. این سناریوها در راستای برنامه‌های توسعه اقتصادی اجتماعی کشور است. تحت سناریوی اول، برنامه‌ریز توسعه منابع و سرمایه‌های انسانی را در اولویت قرار می‌دهد. لذا شاخص‌های نرخ مرگ و میر، شاخص وزنی امکانات بهداشتی و شاخص وزنی امکانات آموزشی دو برابر دیگر شاخص‌ها وزندهی می‌شوند. تحت سناریوی دوم، برنامه‌ریز کاهش نابرابری‌های اقتصادی و بهبود سطح اشتغال را در اولویت قرار می‌دهد. بر این اساس، برنامه‌ریز به بیکاری و نابرابری

درآمدی ضریب ترجیح و اهمیت دو برابر سایر شاخص‌ها را می‌دهد و ماتریس مقایسات زوجی و ضرایب ترجیح به عنوان درایه‌های این ماتریس در همگی استان‌ها تغییر خواهد کرد. بنابراین، بردار اوزان شاخص‌های هر کدام از استان‌ها نیز تغییر خواهد کرد طوری که وزن دو شاخص نرخ بیکاری و ضریب جینی دو برابر سایر شاخص‌ها خواهد بود. در نهایت تحت سناریوی سوم، برنامه‌ریز بهبود سطح تولید و رشد اقتصادی را به عنوان یکی از اهداف برنامه‌های توسعه اقتصادی کشور در ارجحیت قرار می‌دهد، لذا وزن شاخص‌های تولید داخلی استان و ارزش افزوده بخش‌های سه‌گانه دو برابر سایر شاخص‌های تحت بررسی ارزش‌گذاری می‌شود.

براساس این سه سناریو و با توجه به تغییر اوزان شاخص‌های دوازده‌گانه، سهم بهینه تخصیص بودجه استان‌ها تغییر می‌کند. میزان تغییر در جدول شماره (۳) گزارش شده است.

جدول ۳. تغییر در بردار سهم تخصیص بهینه استانی تحت سه سناریوی طراحی شده

استان	سناریوی اول بهبود سرمایه‌های انسانی		سناریوی دوم کاهش نابرابری و بهبود سطح اشتغال		سناریوی سوم بهبود سطح تولید و رشد اقتصادی	
سال	۱۳۹۰	۱۳۹۳	۱۳۹۰	۱۳۹۳	۱۳۹۰	۱۳۹۳
آذربایجان شرقی	۰/۲۶	۰/۳۸	۰/۱۵	۰/۱۷	-۰/۵۵	-۰/۵۶
آذربایجان غربی	۰/۱۱	۰/۱۶	۰/۰۲	۰/۰۳	-۰/۱۳	-۰/۱۵
اردبیل	-۰/۱۵	-۰/۲۶	-۰/۱۷	-۰/۱۱	۰/۵۷	۰/۵۶
اصفهان	۰/۳۰	۰/۴۸	۰/۱۸	۰/۱۹	-۰/۶۲	-۰/۶۳
البرز	۰/۲۸	۰/۴۶	۰/۰۱	-۰/۰۳	-۰/۳۰	-۰/۲۷
ایلام	-۰/۱۸	-۰/۲۶	-۰/۰۲	-۰/۰۷	-۰/۰۲	۰/۰۱
بوشهر	۰/۱۸	۰/۲۸	۰/۲۰	۰/۱۹	-۰/۸۳	-۰/۸۲
تهران	۰/۳۹	۰/۶۹	۰/۲۰	۰/۲۳	-۰/۵۳	-۰/۵۴
چهارمحال	-۰/۳۶	-۰/۵۴	-۰/۲۴	-۰/۲۵	۰/۹۸	۰/۹۷
خراسان جنوبی	-۰/۵۱	-۰/۷۷	-۰/۰۶	-۰/۰۴	۱/۲۲	۱/۲۱
خراسان رضوی	۰/۲۴	۰/۳۶	۰/۲۰	۰/۱۸	-۰/۵۰	-۰/۴۷
خراسان شمالی	-۰/۲۵	-۰/۴۰	-۰/۳۱	-۰/۳۲	۱/۰۸	۱/۰۷
خوزستان	۰/۲۶	۰/۴۵	۰/۱۸	۰/۱۹	-۰/۴۷	-۰/۴۷
زنجان	-۰/۲۶	-۰/۳۹	-۰/۰۳	-۰/۰۵	۰/۳۷	۰/۳۸
سمنان	-۰/۲۷	-۰/۳۴	-۰/۰۷	-۰/۱۷	۰/۶۳	۰/۶۵

استان	سناریوی اول بهبود سرمایه‌های انسانی		سناریوی دوم کاهش نابرابری و بهبود سطح اشتغال		سناریوی سوم بهبود سطح تولید و رشد اقتصادی	
سال	۱۳۹۰	۱۳۹۳	۱۳۹۰	۱۳۹۳	۱۳۹۰	۱۳۹۳
سیستان	-۰/۳۰	-۰/۴۸	-۰/۱۲	-۰/۱۰	۰/۵۹	۰/۵۸
فارس	۰/۲۵	۰/۴۰	۰/۱۶	۰/۱۴	-۰/۶۰	-۰/۵۹
قزوین	۰/۱۲	۰/۱۰	-۰/۱۳	-۰/۰۴	-۰/۰۸	-۰/۱۳
قم	-۰/۱۲	-۰/۲۲	-۰/۲۰	-۰/۲۰	۰/۸۴	۰/۸۵
کردستان	-۰/۱۶	-۰/۲۹	-۰/۱۷	-۰/۱۶	۰/۷۵	۰/۷۵
کرمان	۰/۲۰	۰/۲۹	۰/۲۱	۰/۲۵	-۰/۷۰	-۰/۷۳
کرمانشاه	۰/۰۳	۰/۰۲	-۰/۲۰	-۰/۱۸	۰/۲۱	۰/۲۱
کهگیلویه	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۸	۰/۰۸	-۰/۶۲	-۰/۶۳
گلستان	-۰/۰۹	-۰/۱۷	-۰/۲۰	-۰/۱۹	۰/۳۶	۰/۳۵
گیلان	۰/۰۸	۰/۱۳	-۰/۰۸	-۰/۰۸	-۰/۰۲	-۰/۰۲
لرستان	-۰/۱۲	-۰/۲۳	-۰/۲۱	-۰/۱۸	۰/۳۶	۰/۳۵
مازندران	۰/۲۲	۰/۳۳	۰/۰۶	۰/۱۱	-۰/۵۵	-۰/۵۷
مرکزی	۰/۱۳	۰/۱۹	۰/۱۶	۰/۱۲	-۰/۵۸	-۰/۵۷
هرمزگان	-۰/۰۶	-۰/۰۶	۰/۱۷	۰/۱۰	-۰/۴۵	-۰/۴۰
همدان	-۰/۱۱	-۰/۱۸	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۱۰	۰/۱۰
یزد	-۰/۰۹	-۰/۱۶	۰/۱۹	۰/۱۷	-۰/۵۱	-۰/۵۰

مأخذ: محاسبات تحقیق

تحت سناریوی اول یعنی اولویت و تمرکز برنامه‌ریزی بودجه‌ای بر توسعه منابع استانی به عنوان یکی از اولویت‌های برنامه‌های توسعه اقتصادی و اجتماعی کشور، نقطه تعادل بلندمدت مدل تغییر می‌کند و سهم بهینه تخصیص بودجه‌ای برخی از استان‌ها افزایش پیدا کرده و برخی دیگر با کاهش مواجه می‌شوند. بیشترین افزایش در نتیجه اجرای سناریوی اول به استان‌های تهران، اصفهان، البرز و آذربایجان شرقی اختصاص دارد. همچنین تحت سناریوی دوم یعنی تمرکز برنامه‌ریزان بودجه‌ای بر بهبود سطح اشتغال و کاهش نابرابری درآمدی، با تغییر نقطه تعادل بلندمدت مدل کنترل بهینه، سهم بهینه تخصیص بودجه‌ای همگی استان‌ها دچار تغییر شده است به صورتی که برای برخی از استان‌ها افزایش و برای برخی دیگر کاهش دیده می‌شود. بیشترین افزایش در سناریوی دوم به استان‌های کرمان، بوشهر، اصفهان و تهران بختیاری اختصاص دارد. از سوی دیگر، تحت سناریوی سوم یعنی اگر تمرکز و ارجحیت در تخصیص بودجه، افزایش سطح تولید و ارزش افزوده استان‌ها باشد، با تغییر اوزان

شاخص‌های استانی و بردار سهم بهینه بودجه استان‌ها، سهم برخی از استان‌ها کاهش می‌یابد و برای برخی دیگر از استان‌ها افزایش پیدا می‌کند. میزان تغییر در سهم هر کدام از استان‌ها به وضوح در جدول شماره (۳) گزارش داده شده است.

بدیهی است که مدل انعطاف لازم برای افزایش تعداد شاخص‌ها و افزایش بعد ماتریس مقایسات زوجی را دارد. به وضوح افزایش تعداد شاخص‌ها و تغییر اولویت‌های برنامه‌ریزان بودجه که در قالب ماتریس مقایسات زوجی نمایان می‌گردد، سبب تغییر در ضرایب تخصیص بهینه منابع مالی به استان‌های کشور خواهد شد. پس دستیابی به نتایج قابل اتکا و جامع مستلزم افزایش تعداد نوع شاخص‌ها و طراحی و تحلیل سناریوهای مختلف است.

منابع

- آذر، عادل؛ قشقای، علی (۱۳۸۹). "طراحی مدل ریاضی تخصیص بهینه بودجه، با رویکرد MADM بودجه حمایتی دولت از شهرداری‌های کشور". *اندیشه مدیریت راهبردی*. ۴ (۲). صص ۱۲۸-۱۰۱.
- اسلامی، سیف‌الله (۱۳۹۱). "تعیین و محاسبه درجه توسعه‌یافتگی استان‌های کشور طی دو مقطع (۱۳۷۵-۱۳۸۵)". *مجله اقتصادی- ماهنامه بررسی مسائل و سیاست‌های اقتصادی*. ۱. صص ۶۸-۴۱.
- انتظاری، یعقوب (۱۳۸۹). "تحلیل عملکرد تخصیص بودجه به دانشگاه‌های دولتی". *پژوهش و برنامه‌ریزی در آموزش عالی*. ۳ (۵۷). صص ۲۱-۱.
- پورکاظمی، محمدحسین (۱۳۶۸). *بهینه‌سازی ریاضی*. تهران: مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی.
- پورمحمدی، محمدرضا؛ رنجبرنیا، بهزاد؛ ملکی، کیومرث؛ شفاعتی، آرزو (۱۳۹۱). "تحلیل توسعه‌یافتگی شهرستان‌های استان کرمانشاه". *مجله علمی تخصصی برنامه‌ریزی فضایی*. ۲ (۱). صص ۲۶-۱.
- حسین‌آبادی، محمد (۱۳۹۲). *روش‌های رتبه‌بندی و سطح‌بندی مناطق و شاخص‌های نابرابری منطقه‌ای*. تهران: انتشارات معاونت برنامه‌ریزی و نظارت راهبردی رئیس‌جمهور.
- جدیدی میانداشتی، مهدی (۱۳۸۳). "توزیع متعادل منابع مالی به روش سطح‌بندی توسعه مناطق". *فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی*. شماره ۱۱. صص ۴۱-۱۷.
- حاتمی‌نژاد، حسین؛ ابوبکری، طاهر؛ احمدی، افسانه؛ نایب‌زاده، فرشته (۱۳۹۰). "سنجش درجه توسعه‌یافتگی صنعتی در مناطق مرزی ایران (مطالعه موردی: شمال غرب کشور، شهرستان‌های جنوبی استان آذربایجان غربی)". *مجله پژوهش و برنامه‌ریزی شهری*. سال دوم. شماره ۶. صص ۱۸-۱.
- دانش‌یزدی، محمد؛ ابریشم‌چی، احمد؛ تجریشی، مسعود (۱۳۹۳). "حل مناقشات در مدیریت تخصیص منابع آب با استفاده از نظریه بازی، مطالعه موردی: حوضه آبریز دریاچه ارومیه، آب و فاضلاب". ۲. صص ۵۷-۴۸.

توزیع بهینه منابع بودجه استانی بر پایه یک مدل کنترل بهینه ۲۷

رجبی، احمد (۱۳۹۱). "برنامه‌ریزی آرمانی، رویکردی اثربخش در بودجه‌ریزی و تخصیص بهینه منابع مالی (مطالعه موردی: تخصیص بودجه وزارت بهداشت و درمان به استان‌های کشور)". فصلنامه حسابداری سلامت. ۱ (۳ و ۲). صص ۱۶-۱.

_____ (۱۳۸۹). ترکیب روش برنامه‌ریزی آرمانی (G.P)، منطق فازی Fuzzy Logic و روش تحلیل سلسله مراتبی AHP جهت تخصیص بهینه بودجه وزارت بهداشت و درمان به استان‌های کشور. اولین همایش ملی مدیریت.

رضوانی، محمدرضا (۱۳۸۱). "سنجش درجه توسعه‌یافتگی استان‌های کشور با استفاده از تحلیل تاکسونومی". مجله دانشکده ادبیات و علوم انسانی دانشگاه تهران. دوره ۵۰-۵۱. ش ۱۶۲-۱۶۳. صص ۴۷۴-۴۵۹.

زینل‌زاده، رضا؛ برزوین، صمد؛ قجری، علیرضا (۱۳۹۱). "بررسی و تعیین شاخص‌های توسعه انسانی - آموزشی در استان‌های کشور (در سال‌های ۱۳۸۷ و ۱۳۸۸)". فصلنامه علمی - پژوهشی نگرش‌های نو در جغرافیای انسانی. سال چهارم. شماره ۲. صص ۸۱-۶۳.

سپهردوست، حمید (۱۳۹۰). "عوامل مؤثر بر توسعه‌یافتگی از دیدگاه شاخص‌های سلامت". مدیریت اطلاعات سلامت. سال ۸. شماره ۲. صص ۸-۱.

عابدی، قاسم؛ لکشایی، بهرام؛ طیبی، سیدجمال‌الدین؛ آریان‌زاد، میربهادر قلی (۱۳۸۶). "ارائه مدل برنامه‌ریزی آرمانی جهت تخصیص منابع در بخش آموزشی، دانشگاهی وزارت بهداشت درمان و آموزش پزشکی". مجله علمی پژوهشی دانشگاه علوم پزشکی مازنداران. ۱۷ (۵۷). صص ۸۷-۸۲.

عرب‌مازار، عباس؛ حسین‌نژاد، سیدمرتضی (۱۳۸۳). "برآورد میزان فقر و شدت آن در گروه‌های مختلف شغلی خانوارهای روستایی ایران". اقتصاد کشاورزی و توسعه. ۱۲ (۴۵). صص ۱۳۷-۱۱۳.

محرر، علی؛ صارمی، محمود؛ منظری حصار، مهدی (۱۳۸۵). "به کارگیری مدل ریاضی مناسب به منظور تخصیص اعتبارات عمرانی استانی فصول بودجه به شهرستان‌های استان خراسان". دانش مدیریت. ۱۹ (۷۲). صص ۸۶-۶۳.

مؤمنی، مهدی؛ حاتمی، مجتبی (۱۳۸۹). "تحلیل جغرافیایی از نابرابری و عدم تعادل فضایی توسعه در استان یزد". فصلنامه جغرافیا و مطالعات طبیعی. ۲ (۴). صص ۲۵-۱۵.

مؤمنی، منصور (۱۳۸۹). مباحث نوین تحقیق در عملیات. تهران: انتشارات دانشگاه تهران.

مرکز آمار ایران (۱۳۹۱). گزیده نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۰. تهران. مرکز آمار ایران. دفتر ریاست، روابط عمومی و همکاری‌های بین‌الملل.

_____ (۱۳۹۲). نگاهی به توزیع درآمد در ایران. تهران. مرکز آمار ایران، دفتر ریاست، روابط عمومی و همکاری‌های بین‌الملل.

نسترن، مهین؛ فتاحی، سارا (۱۳۸۸). "سطح‌بندی شهرستان‌های استان گلستان از نظر شاخص‌های توسعه‌یافتگی با استفاده از روش تحلیل عاملی". جغرافیا و مطالعات طبیعی. سال اول. شماره اول. صص ۵۵-۴۳.

نمازی، محمد؛ کمالی، کاملیا (۱۳۸۱). "بررسی نحوه تخصیص اعتبارات بودجه با استفاده از مدل برنامه‌ریزی آرمانی مطالعه موردی: استان فارس". فصلنامه بررسی‌های حسابداری و حسابرسی. ۹ (۱). صص ۵۷-۲۹.

نیکوکار، مسعود (۱۳۹۰). معادلات دیفرانسیل. تهران: انتشارات آزاده.

- Azaiez, M. N. and Sharif, A. L. S. S. (2005). "A 0-1 goal programming model for nurse scheduling". *Computers & Operations Research*. No. 32. Pp. 491-507.
- Bernasconi, M. and Choirat, Ch. and Seri, R. (2010). "The Analytic Hierarchy Process and the Theory of Measurement". *Management Science*. 56. Pp. 699 - 711.
- Branzei, S.; Chen, Y.; Deng, X.; Filos-Ratsikas, A.; Frederiksen, S.; Zhang, J. (2014). *The Fisher market game: Equilibrium and welfare*. To appear in AAAI.
- Forman, E. H. and Saul, I. G. (2001). "The analytical hierarchy process: an exposition". *Operations Research*. 49. Pp. 469-487.
- Fruchter, G. E. and Dou, W. (2005). "Optimal Budget Allocation over Time for Keyword Ads in Web Portals". *Journal of optimization theory and applications*. 124(1). Pp. 157-174.
- Kirk, D. (1998). *Optimal control theory: an introduction*. Dover publication Inc.
- Kwak, N. K. and Diminnie, C. B. (1987). "A goal programing model for allocating operating budgets of academic units". *Socio-Econ. Plan. SCI*. 5. Pp. 333-339.
- Kwak, N. K. and Lee, Ch. (1997). "A Linear Goal Programming Model for Human Resource Allocation in a Health-Care Organization". *Journal of Medical Systems*. 21(3). Pp. 129-140.
- Mas-Colell, A. and Whinston, M. and Green, J. (1991). *Microeconomic theory*. Oxford University Press; 1st edition.
- Routh, E. J. and Fuller, A. T. (1975). *Stability of motion*. Taylor and Francis.
- Saatly, T. L. (2013). *Decision Making for Leaders: The Analytic Hierarchy Process for Decisions in a Complex World*. RWS Publications, 3th edition.
- Seierstand, A. and Sydsaeter, K. (1987). *Optimal control theory with economic applications*. advanced textbook in economics. North Holland: Amsterdam.
- Tam, C. M. and Tong, T. K. L. and Zhang, H. (2007). *Decision Making and Operations Research Techniques for Construction Management*. City University of Hong Kong Press. 1st edition.
- Wey, W. M. and Wu, K. Y. (2007). "Using ANP priorities with goal programing in resource allocation in transportation". *Mathematical and Computer Modeling*. 46. Pp. 985-1000.
- Yang, Y. and Yang, Y. and Liu, D. (2016). *Dynamic Budget Allocation in Competitive Search Advertising: A Differential Game Approach*. Huazhong University of Science and Technology - School of Management.